ARGOMENTI ANALISI

**CAPITOLO 1**

Sia x0 appartenente ad R e r > 0, si chiama intorno di centro x0 e raggio r l’insieme I(x0, r) = Ix0 = {x appartenente ad R tale che d(x, x0) < r}

Un punto x0 appartenente ad R è detto punto di accumulazione per X se in ogni intorno di x0 cade almeno un punto diverso da x0.

**Teorema:** Se x0 è un punto di accumulazione per X, allora in ogni intorno di x0 cadono infiniti punti di X. DIM.

Supponiamo per assurdo che esista un intorno di x0 in cui cadono solo un numero finito di elementi di X, siano x1, …, xn quelli distinti da x0. Posto r = min {|x1 – x0| …}, nell’intorno I(x0, r) non cadrebbe nessun punto di X diverso da x0 e quindi x0 non sarebbe punto di accumulazione.

Si possono definire punti di accumulazione a destra e sinistra per punti di cui si considera, rispettivamente, solo l’intorno destro o sinistro, e punti isolati, cioè punti che non sono di accumulazione.

Un insieme formato esclusivamente da punti isolati si dice discreto.

Si dice che L appartenente ad R è un maggiorante di X se per ogni x appartenente ad X risulta x <= L e si chiama massimo di X il più piccolo dei maggioranti di X che appartiene ad X. Analogamente, L è un minorante se per ogni x appartenente ad X si ha x >= L e si definisce minimo di X il più grande dei minoranti appartenenti ad X.

Si dice che X è limitato superiormente se esiste M apprtenente ad R tale che per ogni x appartenente ad X si ha x <= M, mentre è limitato inferiormente se esiste m appartenente ad R tale che per ogni x appartenente ad X si ha x >= m.

Si chiamano estremo superiore e inferiore di A, rispettivamente il minimo dei maggioranti e il massimo dei minoranti.

**Teorema:** Se esistono, il massimo ed il minimo di X sono unici. DIM.

Siano M ed M’ due elementi di X soddisfacenti la definizione di massimo: allora si ha M, M’ appartenente ad X, per ogni x appartenente ad X, x <= M e x <= M’. Scegliendo x = M’ nella prima e x = M nella seconda, otteniamo M’ <= M e M <= M’; essendo X totalmente ordinato, si ha M = M’.

**CAPITOLO 2**

Per risolvere equazioni il cui discriminante è negativo, Bombelli, matematico del 1500, introdusse il concetto di unità immaginaria: la radice di meno 1 è uguale ad i. Da questo segue che i^0 = 1, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1 e si può osservare una ciclicità nei risultati delle potenze di i.

La forma algebrica di un numero immaginario è a + ib, dove a è la parte reale e b il coefficiente immaginario, e le operazioni vengono effettuate come se si trattasse di monomi, con particolare attenzione alle divisione: quando abbiamo parte immaginaria al denominatore, moltiplichiamo sopra e sotto per il coniugato (a – ib) del denominatore.

Possiamo considerare i numeri complessi come coppie ordinate (a,b) di numeri reali e, poiché le operazioni di somma e prodotto verificano le proprietà commutativa, associativa e distributiva e gli elementi neutri sono anche simmetrizzabili, ci troviamo in un campo. Indicando l’asse delle ascisse come asse reale e quello delle ordinate come asse immaginario, otteniamo il piano di Gauss, in cui possiamo rappresentare i numeri immaginari come punti. Ricorrendo al teorema di Pitagora, possiamo calcolare la distanza del punto dall’origine come la radice della somma dei quadrati di a e b, inoltre, poiché si crea una angolo theta tra questo vettore e l’asse x detto anomalia o argomento, possiamo scrivere dire che a = p cos theta e b = p sin theta, da cui a + ib = p(cos theta + i sin theta), con theta = arctan b/a.

Le operazioni tra numeri complessi in forma trigonometrica sono effettuate ricorrendo alle **leggi di De Moivre:**

z1 \* z2 = p1 \* p2 (cos (alfa + beta) + i sin (alfa + beta))

z1 / z2 = p1 / p2 (cos (alfa – beta) + i sin (alfa – beta))

z1^n = p1^n (cos n\*alfa + i sin n\*alfa)

radice n-esima di z1 = z2 => z1 = z2^n => (sistema) p2^n = p1 e n\*beta = alfa + nk pi greco (le radici distinte si ottengono per k appartenente a {0, …, n-1}

zk = radice n-esima di p (cos (theta + 2k pi greco fratto n) + i sin (theta + 2k pi greco fratto n))

**Teorema fondamentale dell’algebra**: Una equazione di grado n con coefficienti complessi qualsiasi, ammette esattamente n radici complesse se ognuna viene contata con la sua moltepicità.

Per ottenere la forma esponenziale di un numero complesso bisogna partire da quella trigonometrica, infatti vale la relazione e^(i\*theta) = cos theta + i sin theta, da cui z = p\*e^(i\*theta). Ricaviamo inoltre e^-(i\*theta) = cos theta – i sin theta, da cui, sommando o sottraendo, si ottengono le formule per coseno e seno.

**CAPITOLO 3**

Una funzione f: A -> B è una legge che ad ogni x appartenente ad A fa corrispondere uno ed un solo elemento y = f(x) appartenente a B.

A e B sono rispettivamente dominio e codominio della funzione., mentre la x è detta variabile indipendente e la y variabile dipendente.

Una funzione è detta iniettiva se per ogni x1, x2 appartenenti ad A, con x1 diverso da x2, risulta f(x1) diverso da f(x2).

Una funzione è detta suriettiva se per ogni y appartenente a B, esiste x appartenente ad A tale che y = f(x).

Una funzione è biettiva o biunivoca se è sia iniettiva che suriettiva: per ogni y appartenente a B, esiste ed è unica x appartenente ad A tale che y = f(x).

Una funzione si dice crescente se per ogni x1, x2 appartenenti ad A, con x1 < x2, si ha f(x1) <= f(x2), mentre è decrescente se per ogni x1, x2 appartenenti ad A, con x1 < x2, si ha f(x1) >= f(x2).

**Teorema:** Una funzione strettamente monotona è invertibile e la sua inversa è strettamente monotona. DIM.

Se la funzione f : A -> B è strettamente monotona allora per x1, x2 appartenenti ad A, possiamo dire che, se x1 < x2, allora f(x1) < f(x2) oppure f(x1) > f(x2) ed in entrambi i casi risulterà f(x1) diverso da f(x2) se x1 diverso da x2. La funzione è quindi iniettiva e dunque invertibile: data f strettamente crescende, proviamo che f alla meno 1 è a sua volta strettamente crescente, cioè che y1 < y2 => f^-1(y1) < fì-1(y2). Se per assurdo fosse f^-1(y1) >= f^-1(y2) si avrebbe x1 >= x2, da cui f(x1) >= f(x2), cioè y1 >= y2, che contraddice l’ipotesi.

Una funzione è detta pari se f(-x) = f(x), dispari se -f(-x) = f(x), periodica se f(x) = f(x + T).

**CAPITOLO 4**

Un numero reale L è il limite della successione an e si scrive

Lim per n che tende a +infinito di an = L ⬄ per ogni epsilon > 0, esiste v appartenente ad R tale che |an – L| < epsilon per ogni n > v

Lim per n che tende a +infinito di an = +infinito ⬄ per ogni M > 0, esiste v appartenente ad R tale che an > M per ogni n > v

Lim per n che tende a +infinito di an = -infinito ⬄ per ogni M > 0 esiste v appartenente ad R tale che an < -M per ogni n > v

Se il limite è un numero reale la successione si dice convergente, se invece è infinito si dice divergente. Inoltre sia le convergenti che le divergenti si dicono regolari, mentre quelle che non ammettono limite sono non regolati, infine una successione che converge a 0 si dice infinitesima, se va a infinito si dice infinita.

**Teorema:** Una successione convergente è limitata. DIM.

Supponiamo che lim n -> +infinito di an = L, allora per definizione di limite, scelto epsilon = 1 , esiste v appartenente ad R tale che |an – L| < 1 per ogni n > v. Risulta quindi |an| = |an – L + L| <= |an – L| + |L| < 1 + |L|, per ogni n > v. Poiché la relazione non è valida per un numero finito di termini a1, …, av, chiamiamo m il più grande di essi e sia M = max{m, 1 + |L|}. Allora |an| < M per ogni n appartenente ad N, cioè la serie è limitata.

*Corollario della permanenza del segno:* Se an >= 0 per n > v, v appartenente ad R, allora il limite della successione, se esiste, sarà non negativo. DIM.

Se per assurdo il limite della successione fosse negativo, allora, per il teorema della permanenza del segno, esisterebbe un v1 tale che per ogni n > v1 an < 0. Questo è assurdo perché se prendiamo n > max{v1, v} varrebbero contemporaneamente an >= 0 e an < 0, pertanto il limite è positivo.

*Corollario della permanenza del segno:* Se lim n -> +infinito di an = a e lim n -> +infinito di bn = b con an > bn per n > v, v appartenente ad R, allora a > b.

**Teorema di regolarità:** Sia an una successione crescente. Allora esiste il limite della successione e si ha lim n -> +infinito an = sup an. DIM.

Sia L = sup an e consideriamo L < +infinito. Per epsilon > 0 si ha an <= L < L + epsilon per ogni n appartenente ad N. Siccome L – epsilon non è un maggiorante, esiste n0 tale che an0 > L – epsilon. Poiché la successione è crescente si ha an > an0 > L – epsilon, quindi L – epsilon < an < L + epsilon, da cui lim n -> +inf an = L. Consideriamo ora sup an = +inf. La successione non è limitata superiormente e scelto un M appartenente ad R, esiste n0 tale che an0 > M. La successione è crescente e quindi per ogni n > n0 avremo an > an0 > M e questo vuol dire lim n -> +inf an = +inf.

**Teorema di Bolzano – Weierstrass:** da ogni successione limitata si può estrarre una successione convergente.

*Criteri del rapporto di successioni:* Sia an una successione a termini positivi e consideriamo la successione dei rapporti a(n+1) / an. Sia lim n -> +infinito di a(n+1) / an = l. Se 0 <= l < 1 allora an -> 0; se l > 1 allora an diverge; se l = 1 non possiamo dire nulla.

Sia f: A -> R una funzione e x0 un punto di accumulazione per A. Diremo che lim x -> x0 di f(x) = L appartenente ad R se per ogni epsilon > 0 esiste sigma(epsilon) > 0 tale che per ogni x appartenente ad A, con 0 < |x – x0| < sigma, risulti |f(x) – L| < epsilon.

**CAPITOLO 5**

Una funzione è continua in un punto x0 se lim x->x0 f(x) = f(x0)

Un punto x0 è detto punto di discontinuità di prima specie se il limite destro e il limite sinistro sono finiti e diversi tra loro.

Se almeno uno dei due limiti destro e sinistro è infinito o non esiste, si parla di discontinuità di seconda specie.

Se il limite esiste ed è uguale ad L, ma la funzione non è definita in x0 oppure lo è ma risulta f(x0) != L, si parla di discontinuità eliminabile.

**CAPITOLO 6**

L’asintoto è una retta tale che la distanze tra essa ed il grafico f(x) tende a zero per x che tende a infinito o ad un punto dove la funzione non è definita o è discontinua.

Data una funzione f(x) ed un suo punto di accumulazione x0, la retta di equazione x = x0 è un asintoto verticale se lim x->x0 f(x) = infinito (dx, sx, bilatero).

Sia f(x) una funzione e sia lim x->inf f(x) = q appartenente ad R, allora la retta y = q è un asintoto orizzontale (dx, sx, bil).

Sia f(x) una funzione, diremo che la retta y = mx + q è asintoto obliquo se lim x->inf f(x) – mx – q = 0.

La ricerca degli asintoti può continuare nelle funzioni razionali fratte quando queste presentano differenze di grado tra numeratore e denominatore è maggiore/uguale a 2.

**CAPITOLO 7**

Il concetto di derivata nasce dal tentativo di dare una definizione di retta tangente valida in generale e vi si è giunti attraverso un procedimento di approsimazione di rette secanti ad una curva. Data y = f(x), definita in un intervello (a,b), prendiamo un x appartenente ad (a,b) che individua un punto di coordinate (x, f(x)). Incrementiamo il punto di un fattore delta x in modo che x + delta x sia ancora nell’intervallo ed individuiamo così un punto B di ordinata f(x + delta x). Delta x prende nome di incremento della variabile indipendente e può essere sia positivo che negativo, mentre delta y = f(x + delta x) – f(x) è detto incremento di funzione. Il rapporto delta y su delta x prende il nome di rapporto incrementale ed indica, geometricamente, il coefficiente della retta secante che passa per A e B. Se il limite per delta x -> 0 esiste ed è finito, questo prende il nome di derivata di della funzione in x.

Data f(x) definita in un intervallo A e x appartenente ad A, diremo che f è derivabile in x se esiste ed è finito il limite del rapporto incrementale al tendere a 0 dell’incremento delta x.

Un punto di non derivabilità si definisce punto angoloso se esistono sia la derivata sinistra che destra, ma sono diverse tra loro; è un punto di cuspide se i due valori sono infiniti di segno discorde e infine è punto di flesso a tangente verticale se si hanno infiniti di segno concorde.

**CAPITOLO 8**

Sia f(x) una funzione definita nel dominio A. Il punto x0 appartenente ad A si dice massimo relativo per f se esiste un intorno di x0 denotato Ix0 tale che f(x0) >= f(x), per ogni x appartenente all’intorno. Se invece si ha f(x0) <= f(x) abbiamo un minimo relativo.

Un punto in cui la derivata si annulla è detto punto stazionario.

*Corollario del Teorema di Lagrange:* Se una funzione f(x) continua e derivabile in (a,b) e tale che la derivata è sempre nulla in (a,b), allora f(x) è costante in tutto (a,b).

Applichiamo Lagrange all’intervallo [a,x], per cui esiste un punto c tale che f’© = f(x) – f(a) / x – a. La derivata è sempre nulla e quindi f’(c) = 0, per cui f(x) = f(a). Poiché x è arbitrario, la funzione assume lo stesso valore in tutto l’intervallo.

*Corollario del Teorema di Lagrange:* Se due funzioni f(x) e g(x) sono continue e derivabili in (a,b) e tali che f’(x) = g’(x) per ogni x nell’intervallo, allora esse differiscono per una costante. DIM.

Sia z(x) = f(x) – g(x), da cui segue z’(x) = f’(x) – g’(x) = 0. Per il precedente corollario, z(x) è costante in [a,b] e quindi le funzioni differiscono per una costante.

**Criterio di monotonia:** Una funzione f(x), continua e derivabile in (a,b), è crescente se e solo se f’(x) >= 0, per ogni x appartenente ad (a,b). DIM.

Osserviamo che la funzione è crescente se e solo se f(x) – f(x0) / x – x0 >= 0, poiché la diseq è verificata quando num e denom hanno lo stesso segno. Per la permanenza del segno il limite per x->x0 sarà ancora maggiore uguale di 0. Data l’arbitrarietà di x0, la derivata sarà sempre maggiore di 0.

Viceversa, se si ha f’(x) >= 0, consideriamo x0, x appartenenti ad (a,b) e per il teorema di Lagrange si ha un c appartenente a (x0, x) tale che f(x) – f(x0) / x – x0 = f’© >= 0, quindi la funzione è crescente.

**Teorema di De L’Hopital:** Siano f(x) e g(x) due funzioni definite nell’intorno I di un punto x0, derivabili in I – {x0} e g’(x) != 0 per ogni x != x0. Sia inoltre lim x-x0 di f(x) = lim x->x0 g(x) = 0 oppure il valore assoluto delle due = infinito. Se lim x->x0 di f’(x)/g’(x) = L, allora si ha lim x->x0 f(x)/g(x) = L. Il teorema vale anche per x->inf.

Una funzione si dice convessa in x0 se le immagini della retta secante al grafico sono maggiori di f(x0), viceversa, per valori minori di f(x0) la funzione è concava.

Si dice che la funzione f(x) ha un punto di flesso in x0 se in tale punto il grafico cambia concavità: si avrà f’’(x0) = 0.

**CAPITOLO 10**

L’integrale da a a b di f(x)dx è detto integrale della funzione f in [a,b]: i valori a e b sono estremi di integrazione, f è la funzione integranda ed x è la variabile di integrazione.

**Criterio di integrabilità:** Secondo Riemann una condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione f limitata definita in un intervallo [a,b] sia integrabile è che per ogni epsilon > 0 esiste una partizione di [a,b] tale che S(P) – s(P) < epsilon.

Si dice che una funzione G , derivabile in [a,b], è una primitiva di f in [a,b] se G’(x) = f(x), per ogni x appartenente a [a,b].

Se f(x) è integrabile secondo Riemann in [a,b], si definisce funzione integrale F(x) = integrale da a ad x di f(t)dt al variare di x in [a,b].

**Formula fondamentale del calcolo integrale:** Sia f(x) una funzione continua in [a,b] e G(x) la sua primitiva su [a,b], allora l’integrale da a a b di f(t)dt = G(b) – G(a).

Osservando che F(x) e G(x) sono due primitive di f(x), si ha F’(x) – G’(x) = f(x) – f(x) = 0. Poiché la funzione F(x) – G(x) è una costante, si ha G(x) = F(x) + c, da cui si ricava G(x) = integrale da a ad x f(t)dt + c. Se x = a, si ottiene G(a) = c e dopo aver sostituito possiamo porre x = b per ottenere la seguente: G(B) = integrale da a a b di f(t)dt + G(a), da cui si ottiene la formula.

L’integrale visto è detto integrale definito e rappresenta geometricamente l’area sottostante la curva. (Nel caso la funzione sia negativa bisogna calcolare -integrale).

Si definisce invece integrale indefinito della funzione f(x) l’insieme di tutte le primitive di f(x).